數學傳播　50卷1期, pp. 6-10

對稱函數在組合問題中的應用

劉士瑋

本文於 2026 年 1 月 6 日刊載於中研院訊漫步科研專欄, 作者及中研院訊同意本刊轉載。

我們首先看看以下這個中學生也能理解的組合問題:

問 1:

2				
1				
	1	2	3	4

在 4×2 的方格 (如上圖) 中填入 $1 \ldots 8$ 的數字, 並且滿足以下遞增條件:

- 若在座標 (i, j) 的格子填入 a, 在座標 $(i+1, j)$ 的格子填入 b, 則 $b > a$;
- 若在座標 (i, j) 的格子填入 a, 在座標 $(i, j+1)$ 的格子填入 b, 則 $b > a$;

試問有幾種方法?

答 1: 14 種, 可以如下圖依序枚舉

5	6	7	8
1	2	3	4

4	6	7	8
1	2	3	5

4	5	7	8
1	2	3	6

4	5	6	8
1	2	3	7

3	6	7	8
1	2	4	5

3	5	7	8
1	2	4	6

3	5	6	8
1	2	4	7

3	4	7	8
1	2	5	6

3	4	6	8
1	2	5	7

2	6	7	8
1	3	4	5

2	5	7	8
1	3	4	6

2	5	6	8
1	3	4	7

2	4	7	8
1	3	5	6

2	4	6	8
1	3	5	7

上述的問題可以推廣, 4 換成任意的正整數 $n \geq 0$。

問 2: 在 $n \times 2$ 的方格中填入 $1 \ldots 2n$ 的數字, 並且滿足以下遞增條件:

- 若在座標 (i, j) 的格子填入 a, 在座標 $(i+1, j)$ 的格子填入 b, 則 $b > a$;

- 若在座標 (i,j) 的格子填入 a, 在座標 $(i,j+1)$ 的格子填入 b, 則 $b>a$;

試問有幾種方法?

答 2: Catalan 數

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

這公式可由遞迴方法證明。現在考慮一個整數 $1 \le m \le n$, 並考慮以下額外條件

- 座標 $(m,2)$ 的格子填入 $2m$;
- 對所有滿足 $1 \le i < m$ 的數字 i, 座標 $(i,2)$ 的格子填入的數字 $> 2i$;

那麼, 滿足這二個額外條件的填入數字的方法共有 $C_{m-1}C_{n-m}$ 種。因爲每一個填入數字的方法都有一個唯一的 m 滿足以上額外條件, 我們就推得遞迴式

$$C_0 = \sum_{m=1}^{n} C_{m-1}C_{n-m}$$

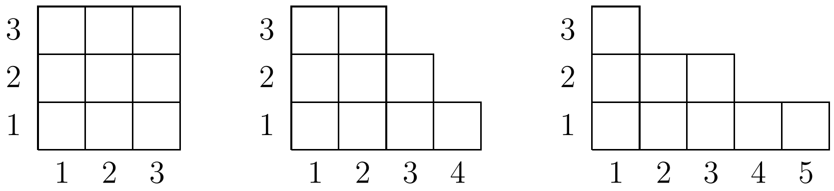
由此遞迴式以及初始值 $C_0 = 1$ 就可由數學歸納法推得上述對一般 $n \ge 0$ 的公式。例如:

$$C_5 = \frac{10!}{6! \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 42$$

讀者不妨動手驗證 5×2 的格子真的有 42 種填入 $1 \ldots 10$ 並且滿足遞增條件的方法。

既然 $n \times 2$ 的方格有一般的公式 (Catalan 數), 那這個公式能不能再推廣呢? $n \times m$ 的方格如何? 更不規則的方格圖呢?

問 3:



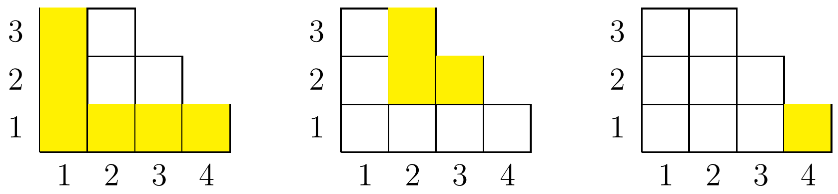
在以上方格圖表中填入 $1 \ldots 9$ 的數字, 並且滿足以下遞增條件:

- 若在座標(i,j) 的格子填入 a, 在座標$(i+1,j)$ 的格子填入 b, 則$b>a$;
- 若在座標(i,j) 的格子填入 a, 在座標$(i,j+1)$ 的格子填入 b, 則$b>a$;

試問分別有幾種方法?

答 3: 分別爲 $84, 168, 162$。

這三個數字 $84, 168, 162$ 可由著名的「鉤長公式」算出, 我們現在就來解釋這個公式。對圖中任一個方格 (i,j) 定義其鉤長 $h(i,j) =$ 正右方與正上方 (含自身) 方格的總數, 例如下圖中



方格 $(1,1)$, $(2,2)$, $(4,1)$ 的鉤長分別爲 $h(1,1)=6$, $h(2,2)=3$, $h(4,1)=1$。如果我們將方格圖各橫列的長度由下而上標示爲$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$, 那麼鉤長公式如下:

$$\frac{(\lambda_1+\cdots+\lambda_r)!}{\prod_{j=1}^{r}\prod_{i=1}^{\lambda_j}h(i,j)}$$

上面的第二個方格圖的橫列長爲$\lambda=(4,3,2)$, 所以套用鉤長公式可以算出滿足遞增條件的填表方法數爲

$$\frac{(4+3+2)!}{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=168$$

同樣的方法, 可以算出 3×3 的方格 $\lambda=(3,3,3)$, 填入 $1\ldots 9$ 並且滿足遞增條件的方法共有 84 種。

鉤長公式是 1900 年由普魯士數學家 Ferdinand Georg Frobenius 所發現。Frobenius 利用排列群 S_n 的線性表現的特徵函數證明了這個公式, 他的方法是現今「對稱函數論」以及「群表現論」二個領域的開端。

「群」是一種數學中用來描述空間對稱性的結構, 其中排列群 S_n 描述的是 n 個點的集合 $\{1,2,3,\ldots,n\}$ 的所有排列 (所以 S_n 有$n!$個元素)。「群表現」則是描述線性空間 (歐式空間) 對稱性的代數結構。由於二者的定義脫離了初等數學的範圍, 筆者在此就不更深入介紹。

「對稱函數」是一種空間中有對稱性的函數, 例如: $F(x,y,z)=xy+xz+yz$ 是個對稱函數, 這是因爲我們可以將 x,y,z 三個變數任意排列而不影響它的值, 也就是說

$$F(x,y,z)=F(x,z,y)=F(y,x,z)=F(y,z,x)=F(z,x,y)=F(z,y,x)$$

我們將這個函數 $F(x,y,z)$ 稱爲「單項式對稱函數」, 通常記作 $m_{(1,1,0)}(x,y,z)$。更一般來說, 任意給定一個遞減數列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, 我們都能定義一個對應的單項式對稱函數 m_λ, 例如

$$m_{(3,0,0)}(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$$
$$m_{(2,1,0)}(x,y,z)=x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y$$
$$m_{(1,1,1)}(x,y,z)=xyz$$

除了這些單項式對稱函數外, 另一組重要的對稱函數稱爲 Schur 函數, 記作 s_λ, 它與對稱群 S_n 的群表現論息息相關, 例如:

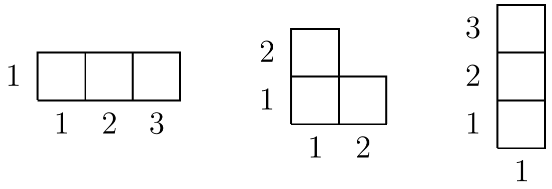
$$s_{(3,0,0)}(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y+xyz$$

$$s_{(2,1,0)}(x,y,z) = x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y + 2xyz$$
$$s_{(1,1,1)}(x,y,z) = xyz$$

事實上, Schur 函數總是可以寫成單項式對稱函數的倍數的和:

$$s_{(3,0,0)} = m_{(3,0,0)} + m_{(2,1,0)} + m_{(1,1,1)}$$
$$s_{(2,1,0)} = m_{(2,1,0)} + 2m_{(1,1,1)}$$
$$s_{(1,1,1)} = m_{(1,1,1)}$$

以上的這些和的各項係數即是著名的 Kostka 數, 它們在「代數組合論」與「群表現論」中有顯著的地位。仔細觀察 $m_{(1,1,1)}$ 這項的係數, 分別爲 $1, 2, 1$, 這正好是以下三方格圖中填入 $1, 2, 3$ 滿足遞增條件的方法數



一般來說, 如果方格圖橫列長爲遞減數列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$, 且一共有 $n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$ 個格子, 那麼 s_λ 這個 Schur 函數中 $m_{(1,1,\ldots,1)}$ 這項的係數即爲在方格圖中填入 $1, \ldots, n$ 且滿足遞增條件的方法數。

20 世紀後半以來,「對稱函數論」以及「群表現論」的發展突飛猛進。對稱函數論中, 最著名的莫非是英國數學家 Ian Grant Macdonald 所發現的 (q,t)-對稱函數以及 (q,t)-Kostka 多項式。前者推廣了 Schur 函數, 後者推廣了 Kostka 數。這二者仍然是現在「群表現論」以及「對稱函數論」中相當熱門的研究主題。

最後, 爲了展示對稱函數論的應用, 我們看看以下問題:

問 4: 給定任意一個參數 q, 將以下 x, y, z 的對稱函數的乘積展開

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = &\left(1-\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{x}{y}q\right)\left(1-\frac{x}{y}q^2\right)\\ &\left(1-\frac{x}{z}\right)\left(1-\frac{x}{z}q\right)\left(1-\frac{x}{z}q^2\right)\\ &\left(1-\frac{y}{x}\right)\left(1-\frac{y}{x}q\right)\left(1-\frac{y}{x}q^2\right)\\ &\left(1-\frac{y}{z}\right)\left(1-\frac{y}{z}q\right)\left(1-\frac{y}{z}q^2\right)\\ &\left(1-\frac{z}{x}\right)\left(1-\frac{z}{x}q\right)\left(1-\frac{z}{x}q^2\right) \end{aligned}$$

$$\left(1-\frac{z}{y}\right)\left(1-\frac{z}{y}q\right)\left(1-\frac{z}{y}q^2\right)$$

試問常數項 ($x^0y^0z^0$ 這項) 的係數爲何?

答 4:

$$\frac{(1-q^8)(1-q^7)(1-q^5)(1-q^4)}{(1-q^2)^2(1-q)^2}$$

若實際動手計算, 這將曠日廢時, 畢竟 18 個二項式的乘積展開將有 $2^{18}=262144$ 項。然而, 這個答案可以不費吹灰之力, 由「Macdonald 常數項公式」輕易算出。「Macdonald 常數項公式」由俄美數學家 Ivan Cherednik 於 1995 年所證明。證明的關鍵是 1990 年代所發展的「Dunkl 算子」以及「雙重仿射 Hecke 環」這些代數結構的特質, 這二個代數結構正是在筆者研究領域的範圍內。

作爲結語, 現代數學研究中, 代數與幾何方法早已隨處可見, 許多看似簡而易懂的組合問題背後深藏了代數與幾何的結構。不僅是組合論的研究, 在其他數學領域中 (例如數論) 也是如此。代數領域中的表現論, 也因爲與各種領域互動接觸, 發展出了多采多姿的方法、技術、理論來解決各式各樣的問題。上文所展示的幾個例子不過是窺見一斑。

—本文作者任職中央研究院數學研究所研究學者—